Ref : FGN
Analyse 4

Leçons 220
221
244

Développement : Solutions développables en série entière de l'équation de Bessel

On considère l'équation de Bessel $(E) : x y''(x) + y'(x) + x y(x) = 0$. C'est une équation importante de la physique, modélisant un pendule simple oscillant dont la longueur du fil peut varier. L'angle vérifie alors une équation de Bessel.

Théorème : • Il existe une unique solution f de l'équation de Bessel développable en série entière en 0 et valant 1 en 0. C'est

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}$$

• Soit g une solution de (E) sur $]0, \alpha[$ linéairement indépendante de f. Alors g est non bornée. • On en déduit que $f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin(\theta)) d\theta$

Preuve :

(1) Par analyse - synthèse :

$\boxed{\text{Analyse}}$ Soit $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une solution de (E) de rayon de convergence non nul, et tq $f(0) = 1$. On calcule ses dérivées :

$$f'(x) = \sum_{n \geq 1} a_n \cdot n \cdot x^{n-1}$$

$$f''(x) = \sum_{n \geq 2} a_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2}$$

Ainsi $x \cdot f''(x) = \sum_{n \geq 1} n \cdot (n+1)\, a_{n+1}\, x^n$. En identifiant les coefficients d'ordre n, on obtient $\forall n \geq 1$:

$$n(n+1)\, a_{n+1} + (n+1)\, a_{n+1} + a_{n-1} = 0$$

Donc $a_{n+1} = \frac{-1}{(n+1)^2} a_{n-1}$, $\forall n \geq 1$. On $a_0 = f(0) = 1$ et $a_1 = f'(0) = 0$.

On en déduit par récurence que $a_{2n+1} = 0 \quad \forall n \geq 0$ et

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n)^2 \times \cdots \times 2^2} \cdot a_0 = \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2}.$$

Synthèse

Posons $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_{2n} x^{2n}$ où $a_{2n} = \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2}$. Calculons son rayon de convergence : $\forall R > 0$, $\frac{(-1)^n}{4^n . (n!)^2} \cdot R^{2n} = \frac{R^n}{n!} \cdot \frac{R^n}{n!} \left(\frac{-1}{4}\right)^n$ est une suite bornée donc par le lemme d'Abel, la série converge absolument $\forall x \in \mathbb{R}$.

⚠ Attention : on ne pouvait pas utiliser le thm de Cauchy-Hadamard car les a_{2n+1} s'annulent !

Ainsi le rayon de convergence de f est infini. De plus les coefficients de f vérifient les équations précédentes donc f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ et $f(0) = 1$.

2 Soit g une solution de (E) sur $]0, \alpha[$, $\alpha > 0$ linéairement indépendante de f. Supposons par l'absurde que g est bornée :

On considère le wronskien $W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - gf'$. On dérive W et on utilise que f et g sont solution de (E) :

$$W' = fg'' + f'g' - f'g' - f''g = \frac{1}{x}\left(f(-g' - xg) - g(-f' - xf)\right) = \frac{-W}{x}$$

donc $W(x) = \frac{A}{x}$ où $A \in \mathbb{R}^*$, non nul car f et g non colinéaires.

On regarde la limite en $x = 0$ de $\frac{A}{x} = fg' - gf'$: g borné, $f'(0) = 0$ et $f(0) = 1$ d'où $\boxed{\frac{A}{x} \underset{x=0}{\sim} g'(x)}$.

Soit $x_0 \in]0, \alpha[$. $x \longmapsto \frac{A}{x}$ est de signe constant sur $]0, x_0]$ et n'est pas intégrable, on peut donc intégrer les équivalents :

$$\int_{x_0}^{x} g'(t)\,dt = g(x) - g(x_0) \underset{x=0}{\sim} A.(\ln(x) - \ln(x_0)) \xrightarrow[x \to 0]{} +\infty$$

On obtient une contradiction car g bornée !

(3) Nous allons en déduire une autre formulation de f :
Posons $g(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin(\theta))\, d\theta$. Par le théorème de dérivation sous le signe intégral, on a g est C^2 et

$$g'(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} -\sin(\theta) \sin(x . \sin(\theta))\, d\theta$$

$$g''(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} -\sin^2(\theta) . \cos(x . \sin(\theta))\, d\theta$$

d'où $x . g''(x) + g'(x) + x g(x) = \frac{1}{\pi} . \int_0^{\pi} x . \cos^2(\theta) . \cos(x . \sin(\theta)) - \sin(\theta) . \sin(x . \sin(\theta))\, d\theta$

Une primitive de cette fonction en θ est $\cos(\theta) . \sin(x \sin(\theta))$, qui a la même valeur en 0 et en π. Ainsi g solution de (E), g bornée et $g(0) = 1$ d'où $g = f$. ■